# Matemática

## Relações entre Conjuntos

### Interseção e União

1. O que é a Interseção entre dois conjuntos? Como representamos? Dê exemplos.

   A interseção entre dois conjuntos é um conjunto que reúne todos os elementos comuns entre os conjuntos iniciais. Por exemplo, seja o conjunto A = {Banana, Maçã, Melancia} e o conjunto B = {Banana, Bandana, Cabana}. A interseção entre os conjuntos A e B é {Banana}. Representamos isso com o símbolo ∩, da forma:

   $$A \cap B = \{Banana\}$$

2. O que significa dizer que dois conjuntos são disjuntos? Dois conjuntos são ditos disjuntos quando a interseção entre eles é um conjunto vazio, ou seja, eles não apresentam nenhum elemento em comum.

3. O que é a União entre dois conjuntos? Como representamos? Dê exemplos.

   A união de dois conjuntos é um conjunto que reúne todos os elementos de ambos conjuntos originais, sem repetição. Tome os mesmos conjuntos do exemplo da questão 1, teríamos o conjunto união dado por {Banana, Maçã, Melancia, Bandana, Cabana}. Representamos isso com o símbolo ∪, da forma:

   $$A \cup B = \{Banana, Maçã, Melancia, Bandana, Cabana\}$$

4. Como essas relações estão ligadas com os conectivos 'e', '∧', 'ou' e '∨'? O conectivo 'e', que pode ser substituído por '∧', quando colocado entre duas sentenças, indica que ambas devem ser obedecidas. Dessa forma, podemos utilizar esse conectivo para construir o conjunto interseção entre dois ou mais conjuntos quaisquer, visto que os elementos devem pertencer ao primeiro E ao segundo E ao terceiro, etc. O conectivo 'ou', que pode ser substituído por '∨', quando colocado entre sentenças, indica que pelo menos uma delas deve ser obedecida. Dessa forma, podemos utilizar esse conectivo para construir o conjunto união entre dois ou mais conjuntos quaisquer, visto que os elementos devem pertencer ao primeiro OU ao segundo OU ao terceiro, etc.

5. Suponha um conjunto A. O que quer dizer n(A)? n(A) é a quantidade de elementos do conjunto A.

**6.** Determine n$(A \cup B)$ em função de n(A), n(B) e n$(A \cap B)$.

Note que, quando somamos a quantidade de elementos de dois conjuntos quaisquer, estamos desconsiderando a possibilidade de um mesmo elemento estar sendo contado duas vezes, quando ele pertence a ambos os conjuntos. Dessa forma, ao fazermos a união entre dois conjuntos A e B, devemos considerar os elementos em comum apenas uma única vez. Dessa forma, para calcular o número de elementos da união, se optarmos por somar o número de elementos de A ao número de elementos de B, devemos subtrair uma vez o número de elementos em comum (interseção), visto que eles são contados duas vezes, uma para cada conjunto. Dessa forma, temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Tomando como exemplo A = {Queijo, Leite, Biscoito} e B = {Queijo, Leite, Vaca}, temos:

$$A \cup B = \{Queijo, Leite, Biscoito, Vaca\}$$

$$A \cap B = \{Queijo, Leite\}$$

$n(A) = 3, n(B) = 3, n(A \cup B) = 4$ e $n(A \cap B) = 2$

Note que se simplesmente somássemos os números de elementos de A e B, teríamos 6 elementos no total, mas Queijo e Leite seriam contados duas vezes. Dessa forma, devemos subtrair 2 da conta total, que é 6. Assim, temos 4 elementos, o que está de acordo com a união:

$$n(A \cup B) = 3 + 3 - 2 = 4$$

**7.** Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das seguintes sentenças:

a. Se $A \supset B$, então $A \cup B = A$. V -> Como A contém B, todos os elementos de B já estão em A, ou seja, ao unir ambos conjuntos, vamos ter o próprio conjunto A.

b. Se $A \cup B = \emptyset$, então A ou B podem ser diferentes de $\emptyset$. F -> Se a união de dois conjuntos resulta em um conjunto vazio, nenhum dos dois pode ter qualquer elemento. Do contrário, esse elemento estaria presente no conjunto união.

c. Se $A \cap B = A$, então $A \subset B$. V -> Se a interseção entre dois conjuntos é um desses conjuntos, isso significa que todos os elementos de um deles estão presentes no outro. No caso, como a interseção entre A e B resulta no próprio conjunto A, pode-se afirmar que o conjunto A está contido em B.

d. Se $A \cap B = A \cup B$, então $A \subset B$ ou $B \subset A$. F -> Se a interseção entre dois conjuntos é igual à união entre esses mesmos conjuntos, é necessário que ambos os conjuntos sejam iguais, ou seja, não basta que $A \subset B$ ou $B \subset A$, é necessário que $A \subset B$ e $B \subset A$, que é o mesmo que dizer que A = B.

**8.** Quais são as propriedades da Interseção e da União? As propriedades da interseção e da união são, para quaisquer conjuntos A, B e C:

- Idempotente: $A \cup A = A$ e $A \cap A = A$.
- Comutativa: $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$.
- Associativa: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ e $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
- Distributiva: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

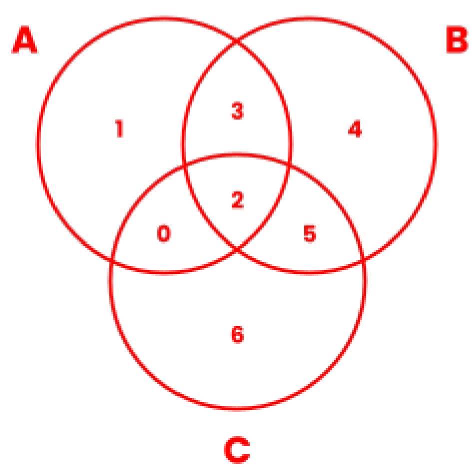
a. Considere A = {0,1,2,3} e B = {2,3,4,5}. Dê exemplos das propriedades.

- Idempotente: note que $A \cup A = \{0, 1, 2, 3\} \cup \{0, 1, 2, 3\} = \{0, 1, 2, 3\} = A$.
- Comutativa: observe que
$A \cap B = \{0, 1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4, 5\} = \{2, 3\} = \{2, 3, 4, 5\} \cap \{0, 1, 2, 3\} = B \cap A$

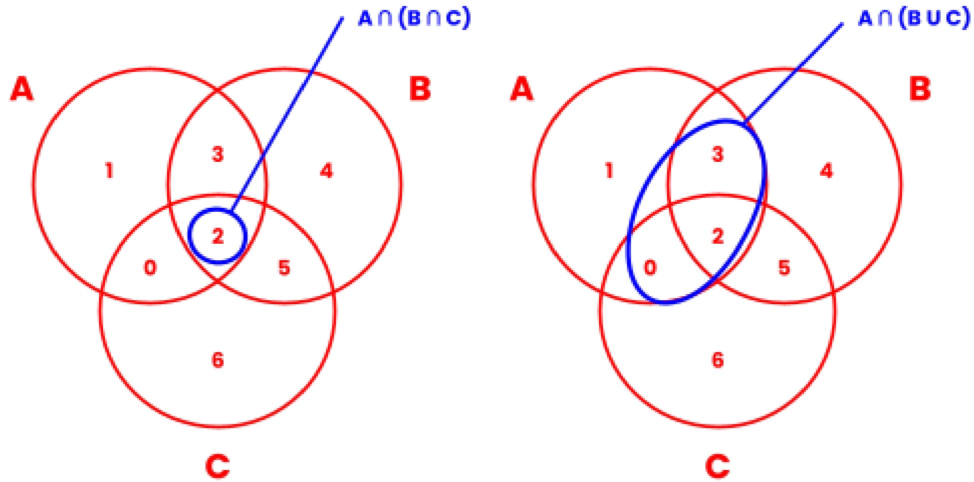
Vamos utilizar um conjunto auxiliar C = {0,2,5,6} para exemplificar as próximas:

- Associativa: note que
$A \cap (B \cap C) = \{0, 1, 2, 3\} \cap (\{2, 3, 4, 5\} \cap \{0, 2, 5, 6\}) = \{0, 1, 2, 3\} \cap \{2, 5\} = \{2\}$
$(A \cap B) \cap C = (\{0, 1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4, 5\}) \cap \{0, 2, 5, 6\} = \{2, 3\} \cap \{0, 2, 5, 6\} = \{2\}$
- Distributiva: observe que
$A \cap (B \cup C) = \{0, 1, 2, 3\} \cap (\{2, 3, 4, 5\} \cup \{0, 2, 5, 6\}) = \{0, 1, 2, 3\} \cap \{0, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{0, 2, 3\}$
$(A \cap B) \cup (A \cap C) = (\{0, 1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4, 5\}) \cup (\{0, 1, 2, 3\} \cap \{0, 2, 5, 6\}) = \{2, 3\} \cup \{0, 2\} = \{0, 2, 3\}$

b. Faça desenhos para ilustrar as propriedades.




Fazendo o Diagrama de Venn para o exercício, fica fácil ilustrar o problema.




**9.** Se x e y são números naturais, os conjuntos de seus divisores D(x) e D(y) podem ser disjuntos? Isso não é possível, pois se x e y são números naturais, eles compartilham, pelo menos, o divisor 1, de forma que a interseção entre D(x) e D(y) terá, pelo menos, um elemento.

**10.** Se A, B e C são conjuntos quaisquer, classifique cada uma das sentenças seguintes em verdadeira (V) ou falsa (F):

a. $(A \cap B) \subset B$. V -> A interseção entre dois conjuntos sempre será subconjunto de ambos.

b. $(B \cup C) \subset B$. F -> A união com o conjunto C pode conferir ao conjunto resultado elementos não inicialmente presentes em B.

c. $(A \cap B) \supset (A \cup B)$. V -> Como a interseção entre dois conjuntos sempre será subconjunto de ambos, também será subconjunto da união de ambos.

d. $\emptyset \subset (A \cap B)$. V -> O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.

e. $(A \cup B) \subset (A \cup B \cup C)$. V -> A união extra com o conjunto C pode apenas adicionar elementos ao conjunto $(A \cup B)$, de forma que, como $(A \cup B) \subset (A \cup B)$, é lógico que $(A \cup B)$ também estará contido em $(A \cup B \cup C)$, visto que nenhum elemento foi removido, apenas possivelmente adicionado.

**11.** Considere A = {0,1,2,3}, B = {2,3,4,5} e C = {1,3,5,7}. Determine:

a. $A \cup B \cup C$. {0,1,2,3,4,5,7}.

b. $(A \cap B) \cup C$. {1,2,3,5,7}.

c. $(A \cap B) \cap C$. {3}.

d. $((B \cup C) \cap (A \cup C)) \cup ((A \cap B) \cup (A \cap C))$. Note que isso é equivalente a:

$$(C \cup (A \cap B)) \cup (A \cap (B \cup C)) = (\{1,3,5,7\} \cup \{2,3\}) \cup (\{0,1,2,3\} \cap \{1,2,3,4,5,7\}) = \{1,2,3,5,7\} \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3,5,7\}.$$

**Diferença**

**12.** O que significa uma diferença entre um conjunto A e um conjunto B, ou seja, $A - B$? Computar a diferença, nesse caso, é retirar de A todos os elementos que também estão presentes em B.

**13.** O que é um conjunto complementar? Como representamos isso? Um conjunto complementar é o conjunto de elementos que estão no conjunto universo mas não fazem parte do conjunto original. Por exemplo, seja U = {1,2,3} e A = {1}. O conjunto complementar de A é {2,3}. Representamos isso com uma barra, ou seja, $\overline{A}$. Também é possível calcular o complementar de A em relação a um outro conjunto, que não o universo, por exemplo, digamos que B = {1,2}, então podemos dizer que o complementar de A em relação a B é:

$$C_B^{\ A} = \{2\}$$

**14.** Seja A = {0,1,2,3,4} e B = {1,2,3}.

a. Determine $C_B^A$. {0,4}.

b. Determine $B - A$. {} ou ∅.

c. É possível definir $C_A^B$ ? Não é possível definir, uma vez que A não está contido em B.

**15.** Dados os conjuntos A = {1,2,3,4,5}, B = {2,4,6,8,10} e C = {1,3,5,7,9}, determine:

a. $A - B$. {1,3,5}.

b. $C - A$. {7,9}.

c. $(A - B) \cap (A - C)$. {} ou ∅.

d. $(A - B) \cup (A - C)$. {1,2,3,4,5}.

e. $(C \cup B) - A$. {6,7,8,9,10}.

f. $(A \cup B) - (C \cap A)$. {2,4,6,8,10}.

**16.** Considere um universo definido por todos os números inteiros de 1 a 20. Utilizando A, B e C da questão anterior, determine:

a. $\overline{A} - B$. {7,9,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20}.

b. $(A \cap C) \cup \bar{A}$. {1,3,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20}.

c. $\overline{(A \cup B \cup C)}$. {11,12,13,14,15,16,17,18,19,20}.

d. $\overline{(A \cap C)} \cup B$. {2,4,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20}.

e. $\overline{A} \cap \overline{B}$. {7,9,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20}.