



Matemática

Análise Combinatória I

Princípio Fundamental da Contagem

1. Maria vai a um restaurante e quer almoçar. Ela descobre que pode escolher 1 entrada, 1 prato principal, 1 acompanhamento e 1 sobremesa para pagar apenas o valor da promoção. O cardápio do restaurante é dado a seguir:
 - a. Entradas: Fritas, Iscas de Peixe, Iscas de Frango, Casquinha de Siri.
 - b. Pratos Principais: Bife de Boi, Filé de Tilápia, Camarão Frito.
 - c. Acompanhamentos: Arroz, Arroz à Grega, Farofa e Vinagrete, Macarrão, Salada.
 - d. Sobremesas: Pudim, Brigadeiro.

De quantas maneiras Maria pode montar seu almoço?

Maria deverá escolher um elemento de cada categoria. Como as categorias são independentes, temos:

$$4 \text{ (entradas)} \times 3 \text{ (pratos principais)} \times 5 \text{ (acompanhamentos)} \times 2 \text{ (sobremesas)} \\ = 120 \text{ maneiras}$$

2. Um viajante vai da cidade A até a cidade C, podendo passar pela cidade B. Sabe-se que existem 3 rodovias que ligam a cidade A à cidade C diretamente, 5 rodovias que ligam A a B e 2 rodovias que ligam B a C. Quantos caminhos diferentes o viajante pode fazer para chegar ao destino?

Existem 3 caminhos que ligam diretamente a cidade A à cidade C, ou seja, isso já é uma possibilidade completa para chegar em C. A outra forma seria chegar no destino passando por B. Como existem 5 rodovias que ligam A até B e 2 rodovias que ligam B até C, podemos calcular o número de possibilidades de fazer a viagem, passando por B, da forma: $5 (A \rightarrow B) \times 2 (B \rightarrow C) = 10$ possibilidades. Somando as possibilidades dos dois casos, viagem direta e passando por B, temos:

$$3 + 10 = 13 \text{ caminhos diferentes}$$

3. Três amigos camaleões: Dan, Du e Dino conversam sobre as 20 cores que podem assumir. Cada um deles pode se colorir de apenas uma cor por vez. Juntos, eles podem se apresentar de diversas formas diferentes. Supondo que, em uma



brincadeira, eles assumam uma configuração diferente a cada 5 segundos, qual deverá ser o tempo necessário, em minutos e segundos, para que eles passem por todas as configurações possíveis?

Observe que os camaleões são diferentes e independentes, de forma que podemos calcular todas as possibilidades de eles se apresentarem da forma

$$20 \text{ (cores do C1)} \times 20 \text{ (cores do C2)} \times 20 \text{ (cores do C3)} = 8000 \text{ configurações}$$

Como eles assumem uma configuração diferente a cada 5 segundos, temos um tempo total de $8000 \times 5 = 40000$ segundos. Convertendo 40000 segundos em minutos e segundos, temos:

$$40000 \text{ segundos} = 666 \text{ minutos e } 40 \text{ segundos}$$

4. Joãozinho joga RPG e utiliza seu dado não viciado de 10 faces para brincar com seus amigos. Sabendo-se que ele vai jogar seu dado 5 vezes em sequência, qual o número de caminhos diferentes que a brincadeira pode tomar? (Cada resultado diferente do conjunto de lançamentos leva a um estágio diferente da brincadeira)

Observe que cada rolagem do dado é um evento independente, de forma que podemos fazer:

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100000 \text{ caminhos diferentes}$$

5. Com os 10 algarismos (0 a 9), responda:
- Quantos números de 3 algarismos podemos formar?
O primeiro algarismo não pode ser 0, logo: $9 \times 10 \times 10 = 900$ números.
 - Quantos números de 4 algarismos podemos formar apenas com algarismos ímpares? E apenas com algarismos pares?
Com algarismos ímpares (1, 3, 5, 7, 9), temos: $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ números.
Com algarismos pares (0, 2, 4, 6, 8), o primeiro não pode ser 0, logo: $4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$ números.
 - Quantos números de 5 algarismos podemos formar com algarismos pares e ímpares intercalados?
Note que temos duas possibilidades: PIPIP ou IPIPI, cada uma delas podendo ser calculada como:
 $PIPIP$ (o primeiro não pode ser 0) = $4 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 2500$ números.
 $IPIPI = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 3125$ números.
Somando ambas possibilidades: $2500 + 3125 = 5625$ números.



- d. Quantos números de 3 algarismos podemos formar que não são divisíveis por 5? E que não são divisíveis por 2?
Para não ser divisível por 5, devemos garantir que o último algarismo não é 0 e nem 5. Sendo assim, como o primeiro não pode ser 0, temos: $9 \times 10 \times 8 = 720$ números.
Para não ser divisível por 2, devemos garantir que o último algarismo é par. Sendo assim, como o primeiro não pode ser 0, temos: $9 \times 10 \times 5 = 450$ números.
6. Em uma festa, há 50 homens e 40 mulheres. Sabe-se que 90% dos homens sabem dançar e que o triplo do número de homens que não sabem dançar é igual ao número de mulheres que sabem. Eles vão escolher um homem e uma mulher para dançarem no centro do salão.
Primeiro, é importante notar que temos 45 homens e 15 mulheres que sabem dançar.
- a. De quantas formas essa dupla pode ser formada?
 50 (homens) \times 40 (mulheres) = 2000 formas.
- b. De quantas formas essa dupla pode ser formada de forma que ambos saibam dançar?
 45 (homens) \times 15 (mulheres) = 675 formas.
- c. De quantas formas essa dupla pode ser formada de forma que ambos não saibam dançar?
 5 (homens) \times 25 (mulheres) = 125 formas.
- d. De quantas formas essa dupla pode ser formada de forma que apenas uma pessoa saiba dançar?
 45 (homens dançarinos) \times 25 (mulheres não dançarinas) = 1125 formas.
 5 (homens não dançarinos) \times 15 (mulheres dançarinas) = 75 formas.
Somando $1125 + 75 = 1200$ formas.
- e. Some os resultados dos itens 'b', 'c' e 'd' e compare com o resultado do item 'a'. O que você pode dizer sobre isso? Por quê?
Somando os resultados, temos $675 + 125 + 1200 = 2000$. O resultado é igual ao do item A, pois consideramos todos os casos de possibilidades em que podemos formar duplas, só que dividimos em condições.

Permutações e Trocas

7. De quantas formas diferentes podemos enfileirar 5 alunos: Miguel, Marcos, Lucas, Pablo e Vinícius? E se Miguel e Marcos tivessem que ficar juntos?

Basicamente, queremos todas as possibilidades de trocar os alunos de lugar. Fazemos: $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$ formas.



Se quisermos Miguel e Marcos juntos, podemos considerá-los como um único aluno, de forma que, agora, queremos as trocas entre 4 alunos, de forma que temos 4!. Entretanto, Miguel e Marcos podem trocar de lugar entre si, adicionando um fator multiplicativo de 2! (permutação entre os dois). Ficamos com: $4! 2! = 48$ formas.

8. Quantos anagramas diferentes tem a palavra "amigo"?

O número de anagramas da palavra é essencialmente as trocas entre as letras. Ficamos com: $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$ anagramas.

9. Colocando-se em ordem alfabética todos os anagramas distintos de "ajude", qual a palavra que está na posição 87? Qual a posição da palavra "eduja"?

A) O primeiro passo é colocar em ordem alfabética as letras da palavra: a d e j u. Vamos criar uma variável S inicialmente colocada como 0, que define nossa contagem de anagramas. Temos:

$$S = 0$$

Observe que, fixando o 'a' como primeira letra, temos 4! opções para as próximas letras, logo:

$$a \underline{4} \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 24 \text{ palavras que começam com a.}$$

Somamos S com o resultado, como agora temos 24 anagramas que começam com a letra 'a'. Fazemos isso para as outras letras:

$$S = 24$$

$$d \underline{4} \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 24 \text{ palavras que começam com d.}$$

$$S = 48$$

$$e \underline{4} \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 24 \text{ palavras que começam com e.}$$

$$S = 72$$

$$j \underline{4} \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 24 \text{ palavras que começam com j.}$$

$S = 96$ (observe que a soma passou de 87, valor que queremos, então não somamos e mantemos a primeira letra como j. Passamos agora a repetir para as próximas letras.)

$$S = 72$$

$$j a \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 6 \text{ palavras que começam com ja.}$$

$$S = 78$$

$$j d \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 6 \text{ palavras que começam com jd.}$$



$$S = 84$$

$j e \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 6$ palavras que começam com *je*.

$S = 90$ (não somamos e mantemos o e)

$$S = 84$$

$j e a \underline{2} \underline{1} = 2$ palavras que começam com *jea*.

$$S = 86$$

$j e d \underline{2} \underline{1} = 2$ palavras que começam com *jed*.

$S = 88$ (não somamos e mantemos o d)

$$S = 86$$

$j e d a u = 1$ palavra.

Note que, como antes de 'jedau' tínhamos 86 palavras, essa deverá ser a de posição 87.

B) O processo é similar ao que fizemos em A).

$$S = 0$$

$a \underline{4} \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 24$ palavras que começam com *a*.

$$S = 24$$

$d \underline{4} \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 24$ palavras que começam com *d*.

$$S = 48$$

$e \underline{4} \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 24$ palavras que começam com *e*.

Como 'e' é a letra que queremos, não somamos e mantemos o 'e'.

$$S = 48$$

$e a \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 6$ palavras que começam com *ea*.

$$S = 54$$

$e d \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 6$ palavras que começam com *ed*.

Como 'd' é a letra que queremos, não somamos e mantemos o 'd'.

$$S = 54$$

$e d a \underline{2} \underline{1} = 2$ palavras que começam com *eda*.

$$S = 56$$

$e d j \underline{2} \underline{1} = 2$ palavras que começam com *edj*.

$$S = 58$$

$e d u \underline{2} \underline{1} = 2$ palavras que começam com *edu*.

Como 'u' é a letra que queremos, não somamos e mantemos o 'u'.

$$S = 58$$

$e d u a j = 1$ palavra \rightarrow posição 59.

$e d u j a = 1$ palavra \rightarrow posição 60.

A palavra 'eduja' está na posição 60.



10. Joãozinho tem 12 livros (5 de matemática, 2 de história, 4 de física e 1 de química). Ele quer organizar os livros em uma prateleira. De quantas maneiras ele pode fazer isso: A) com todos os livros de matemática juntos? B) sem que todos os livros de matemática estejam juntos?

A) Consideramos os livros de matemática como um só livro (bloco), de forma que a permutação de todos os livros agora se torna $8!$. Entretanto, os livros de matemática podem trocar entre si, dentro desse bloco criado, adicionando um fator de $5!$. Temos $8!5!$ como resposta.

B) Basta subtrair a resposta encontrada em A) do total de possibilidades de permutação: $12! - 8!5!$.

11. Um grupo de oito amigos foi ao cinema, tendo comprado ingressos para cadeiras adjacentes. De quantas maneiras eles podem se sentar lado a lado, sabendo-se que 5 desses amigos (Miguel, Matheus, Marcos, Lucas e João) devem se sentar juntos e que Miguel deve estar sempre ao lado de Lucas?

Mesma análise da questão 10, mas, agora, devemos realizar o processo duas vezes. Vamos considerar o grupo de 5 amigos como um só bloco (blocão), de forma que temos 4 elementos para permutar (os 3 amigos que podem ficar separados e o bloco de 5 amigos), resultando em $4!$. Dentro desse bloco de 5 amigos, dois devem ficar juntos, vamos considerá-los, também, como um novo bloco (bloquinho). Temos então, dentro do "blocão", a permutação dos 3 amigos que não precisam ficar juntos + o "bloquinho", resultando em $4!$. Entretanto, os 2 amigos podem trocar de lugar dentro do "bloquinho", adicionando um fator de $2!$. Juntando tudo, temos: $4!4!2!$.

Permutações e Trocas com Elementos Iguais ou em Ordem

12. De quantas formas diferentes podemos enfileirar 5 alunos: Miguel, Marcos, Lucas, Pablo e Vinícius, sendo que Miguel deve estar sempre à frente de Pablo e Pablo à frente de Vinícius?

O que queremos é garantir que Miguel, Pablo e Vinícius não troquem entre si, pois alteraria a ordem da fila. Entretanto, todos os alunos podem trocar entre si, desde que respeitada a primeira condição. Logo, temos $5!/3! = 20$ formas, desconsiderando os 3! da troca entre os alunos que devem respeitar a ordem.

13. Quantos anagramas diferentes tem a palavra "arara"?

Basta fazer $5!/(3!2!) = 10$, desconsiderando as trocas entre letras iguais.



14. Colocando-se em ordem alfabética todos os anagramas distintos de “agosto”, qual a palavra que está na posição 100? Qual a posição da palavra “otsoga”?

A) O primeiro passo é colocar em ordem alfabética as letras da palavra: a g o o s t. Vamos criar uma variável S inicialmente colocada como 0, que define nossa contagem de anagramas. Temos:

$$S = 0$$

Observe que, fixando o ‘a’ como primeira letra, temos $5!/2!$ opções para as próximas letras, pois o ‘o’ é repetido, logo:

$$a \underline{5} \underline{4} \underline{3} \underline{2} \underline{1} / 2! = 60 \text{ palavras que começam com a.}$$

Somamos S com o resultado, como agora temos 60 anagramas que começam com a letra ‘a’. Fazemos isso para as outras letras:

$$S = 60$$

$$g \underline{5} \underline{4} \underline{3} \underline{2} \underline{1} / 2! = 60 \text{ palavras que começam com g.}$$

$S = 120$ (observe que a soma passou de 100, valor que queremos, então não somamos e mantemos a primeira letra como g. Passamos agora a repetir para as próximas letras.)

$$S = 60$$

$$g a \underline{4} \underline{3} \underline{2} \underline{1} / 2! = 12 \text{ palavras que começam com ga.}$$

$$S = 72$$

$g o \underline{4} \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 24 \text{ palavras que começam com go.}$ (Observe que o ‘o’ não repete na permutação nesse caso)

$$S = 96$$

$$g s \underline{4} \underline{3} \underline{2} \underline{1} / 2! = 12 \text{ palavras que começam com gs.}$$

$S = 108$ (não somamos e mantemos o s)

$$S = 96$$

$$g s a \underline{3} \underline{2} \underline{1} / 2! = 3 \text{ palavras que começam com gsa.}$$

$$S = 99$$

$$g s o \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 6 \text{ palavras que começam com gso.}$$

$S = 105$ (não somamos e mantemos o o)

$$S = 99$$

$$g s o a \underline{2} \underline{1} = 2 \text{ palavras que começam com gsoa.}$$

$S = 101$ (não somamos e mantemos o a)

$$S = 99$$



$g s o a o t = 1$ palavra.

Note que, como antes de 'gsoaot' tínhamos 99 palavras, essa deverá ser a de posição 100.

B) O processo é similar ao que fizemos em A).

$S = 0$

$a \underline{5} \underline{4} \underline{3} \underline{2} \underline{1} / 2! = 60$ palavras que começam com a.

$S = 60$

$g \underline{5} \underline{4} \underline{3} \underline{2} \underline{1} / 2! = 60$ palavras que começam com g.

$S = 120$

$o \underline{5} \underline{4} \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 120$ palavras que começam com o.

Não somamos e mantemos o o, pois é a letra que queremos.

$S = 120$

$o a \underline{4} \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 24$ palavras que começam com oa.

$S = 144$

$o g \underline{4} \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 24$ palavras que começam com og.

$S = 168$

$o o \underline{4} \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 24$ palavras que começam com oo.

$S = 192$

$o s \underline{4} \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 24$ palavras que começam com os.

$S = 216$

$o t \underline{4} \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 24$ palavras que começam com ot.

Não somamos e mantemos o t, pois é a letra que queremos.

$S = 216$

$o t a \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 6$ palavras que começam com ota.

$S = 222$

$o t g \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 6$ palavras que começam com otg.

$S = 228$

$o t o \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 6$ palavras que começam com oto.

$S = 234$

$o t s \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 6$ palavras que começam com ots.

Não somamos e mantemos o s, pois é a letra que queremos.

$S = 234$

$o t s a \underline{2} \underline{1} = 2$ palavras que começam com otsa.

$S = 236$

$o t s g \underline{2} \underline{1} = 2$ palavras que começam com otsg.

$S = 238$

$ots\underline{o}\underline{2}1 = 2$ palavras que começam com *otso*.

Não somamos e mantemos o *o*, pois é a letra que queremos.

$S = 238$

$otsoga = 1$ palavra \rightarrow posição 239.

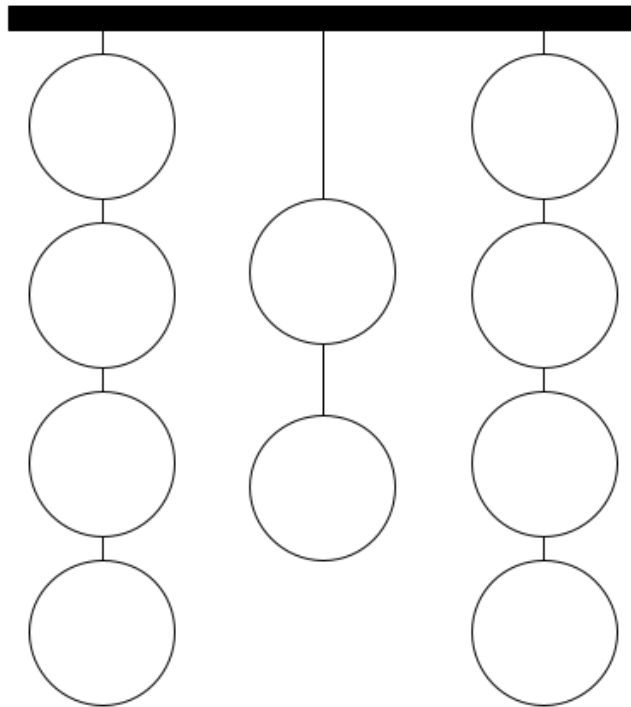
$otsoga = 1$ palavra \rightarrow posição 240.

A palavra 'otsoga' está na posição 240.

15. De quantas formas diferentes podemos organizar 8 canetas em um estojo, sabendo que elas ficam adjacentes e temos 3 canetas pretas, 2 vermelhas, 1 azul, 1 verde e 1 laranja?

Basta fazer $8!/(3!2!) = 3360$, desconsiderando as trocas entre canetas iguais.

16. Um jogo de tiro tem 10 alvos, presos no teto na seguinte configuração:



Para conseguir a pontuação máxima, um jogador deve acertar todos os alvos com um tiro, sem derrubar alvos intactos. Um alvo é derrubado quando é acertado por um tiro ou quando um alvo que está acima dele é acertado. De quantas maneiras (ordens) diferentes um jogador pode atirar para obter a pontuação máxima?



Esse problema se torna simples se entendermos que temos três filas (as colunas para tiro), de forma que não podemos alterar a ordem dos tiros dentro das colunas, mas podemos alternar entre as colunas. Imagine que temos as colunas A, B e C, com elementos: A1, A2, A3, A4, B1, B2, C1, C2, C3, C4. Queremos sempre atirar em A4 antes de A3, em A3 antes de A2, em A2 antes de A1 e assim para todas as colunas. Então o que queremos é permutar todos esses elementos, mas garantindo que a ordem de cada coluna se mantenha. Podemos fazer, então: $10!/(4!2!4!)$, desconsiderando as trocas dentro de cada coluna.

Escolha de Grupos e “Comissões” (Grupos com Cargos Distintos)

17. De quantas formas podemos formar um grupo de 3 professores, sabendo-se que existem 7 professores na escola?

Queremos $C_{n,k} = C_{7,3} = \frac{7!}{3!4!} = 35$ formas.

18. De quantas formas podemos formar uma banda com 3 professores, de forma que um seja cantor, um seja guitarrista e o outro baterista?

Queremos $A_{n,k} = A_{7,3} = \frac{7!}{4!} = 210$ formas.

19. De quantas formas podemos formar 5 trios com 15 alunos de uma sala?

Queremos $\left(\frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3!} \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3!} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3!}\right) \cdot \frac{1}{5!}$ desconsiderando as trocas dentro dos grupos (3! em cada trio) e entre os grupos (5! No final).

20. De quantas maneiras distintas podemos dividir 18 pessoas em 3 grupos de 6 pessoas para participar de uma expedição, sabendo-se que esses grupos vão em horários diferentes?

A análise é similar à da questão 19, mas, nesse caso, os grupos são distintos, então não dividimos pela troca entre os grupos, temos: $\frac{18!}{(6!)^3}$.

21. De quantas maneiras distintas podemos dividir 8 pessoas em 4 duplas para um trabalho, sabendo-se que cada dupla tem um apresentador e um passador de slide?

Nesse caso, também temos uma análise similar à da questão 19, mas não desconsideramos as trocas entre os alunos de cada dupla, pois são “cargos” diferentes. Desconsideramos apenas as trocas entre os grupos, pois não há diferença



entre as duplas. Temos: $\frac{8!}{4!}$.

22. De quantas maneiras distintas podemos dividir 12 pessoas em 4 trios para um trabalho, sabendo-se que cada trio tem um tema diferente e é organizado em apresentador, editor e passador de slide?

Como temos 4 trios diferentes e, também, "cargos" diferentes em cada trio, não desconsideramos nenhuma permutação, pois qualquer alteração muda a configuração. Dessa forma, temos 12!.

Problemas com Partições

23. Uma pessoa ganhou 8 fichas em um fliperama e quer gastar com os prêmios. Cada prêmio custa 2 fichas e estão disponíveis os seguintes prêmios: Ursinho de Pelúcia, Anel de Caveira, Colar e Arminha D'água. Sabendo que ele pode gastar quantas fichas quiser, de quantas maneiras ele pode sair do fliperama, com relação às diferentes possibilidades de prêmios?

Note que a pessoa pode escolher 4 prêmios, por exemplo, vamos representar os prêmios com a letra X. Além disso, ela tem 4 opções de prêmios. Vamos imaginar uma caixinha para cada prêmio. Essas caixinhas são divididas por 3 barras (|), de forma que uma escolha possível de prêmio seria: X|X|X|X. Ou seja, tudo que está à esquerda da primeira barra refere-se à escolha do prêmio 1, tudo que está entre a primeira e a segunda refere-se à escolha do prêmio 2, tudo que está entre a segunda e a terceira refere-se à escolha do prêmio 3 e tudo que está à direita da última barra refere-se ao prêmio 4. Note que, para representar todas as escolhas, basta calcular a permutação de todos esses elementos, desconsiderando as trocas entre os elementos iguais. Temos $\frac{7!}{(4!3!)} = 35$ maneiras. Mas isso apenas considera a possibilidade de a pessoa gastar as 8 fichas. Como cada prêmio custa 2 fichas, ela poderia gastar 6 fichas, 4 fichas, 2 fichas ou 0 fichas, trocando por, respectivamente, 3, 2, 1 ou 0 prêmios. Fazendo a análise para cada um dos casos, temos:

$$\frac{7!}{4!3!} + \frac{6!}{3!3!} + \frac{5!}{2!3!} + \frac{4!}{3!1!} + 1 = 70 \text{ possibilidades}$$

24. Quantas soluções inteiras não negativas tem a equação $x + y + z + w = 12$?

De forma similar à questão 23, podemos entender cada variável como uma caixinha. Queremos distribuir 12 bolinhas nas caixinhas. Logo, temos 12 bolinhas + 3 barrinhas = 15 elementos. O número de soluções é dado por: $\frac{15!}{(12!3!)} = 455$ soluções.



- 25.** Uma menina quer distribuir seus oito anéis de cores diferentes entre seus 10 dedos. De quantas formas ela pode fazer isso?

Esse caso é parecido com os das questões 23 e 24, mas considerando anéis diferentes e que a ordem dos anéis nos dedos muda a configuração. A única diferença vai ser que não desconsideramos a permutação entre os anéis. Temos 8 anéis + 9 barrinhas = 17 elementos. Logo: $17!/9!$ é a resposta.

Desafio

- 26.** Quantos anagramas diferentes têm a palavra “abacaxi”, sendo que não há nenhuma letra ‘a’ ao lado de outra letra ‘a’?

Essa questão exige uma abordagem mais complexa. Primeiro vamos calcular quantos anagramas tem abacaxi: $7!/3! = 840$.

Vamos continuar calculando todos os anagramas de abacaxi que tem 3 ‘a’ juntos. Para isso, consideramos que há um único ‘a’ e calculamos a permutação. Temos, agora, 5 letras (a₃ b c x i), logo, $5! = 120$. Vamos guardar esse número.

Podemos então calcular todos os anagramas de abacaxi que tem 2 ‘a’ juntos. Fazemos isso calculando $6! = 720$, pois temos 6 letras (a₁ a₂ b c x i). Observe que juntamos dois ‘a’, então essa nova letra formada a₂ não é igual ao outro ‘a’ que está sozinho a₁, por isso não dividimos por 2! para desconsiderar.

Mas temos que levar em conta que, ao calcular o número de possibilidades com 2 ‘a’ juntos, estamos considerando duas vezes as possibilidades com 3 ‘a’ juntos, pois observe que $a_3 = a_2 a_1 = a_1 a_2$. Sendo assim, temos que fazer $720 - 120 = 600$.

Conseguimos calcular o número de anagramas com pelo menos 1 ‘a’ ao lado de outro ‘a’. Agora basta fazer $840 - 600 = 240$ para encontrar a resposta ao que foi pedido.